3. Operace s komplexními čísly v algebraickém tvaru

- algebraický tvar kompl. čísla $z = a+bi$ a ... reálná část, b ... imaginární část, $a, b \in R$ (reálná čísla!)
  - i ... imaginární jednotka $i^2=-1$
  - umožňuje počítat s komplexními čísly jako s algebraickými dvojčleny

DEF.:

Pro každá 2 kompl. čísla $z_1=a+bi$, $z_2=c+di$ definujeme

- SOUČET: $z_1+z_2 = a+bi+c+di = a+c+(b+d)i$

  př. $(2+3i)+(4-5i) = 6-2i$

- SOUČIN: $z_1\cdot z_2 = (a+bi)(c+di) = ac+adi+bci+bd\underbrace{i^2}_{-1} = \underbrace{ac-bd}_{Re}+\underbrace{(ad+bc)}_{Im}i$

  př. $(2+3i)(4+5i) = 8+10i+12i+\underbrace{15\underbrace{i^2}_{-1}}_{-15} = 8-15+22i = -7+22i$

- ROVNOST: $z_1=z_2 \Leftrightarrow a+bi=c+di \Leftrightarrow a=c \wedge b=d$

  př. Urči $r, s \in R$ tak, aby platila rovnost

  $(i-2)r-(s-3)i = 4i-6$ [L i P stranu upravíme na tvar $a+bi$ a porovn. Re, Im části]

  $ri-2r-si+3i = 4i-6$

  $\underbrace{-2r}_{Re}+(\underbrace{r-s+3}_{Im})i = \underbrace{-6}_{Re}+\underbrace{4}_{Im\ (!\ bez\ i)}i$

  $-2r=-6 \Rightarrow \underline{r=3}$

  $r-s+3=4$

  $3-s+3=4$

  $6-s=4$

  $-s=+4-6$

  $-s=-2$

  $\underline{s=2}$

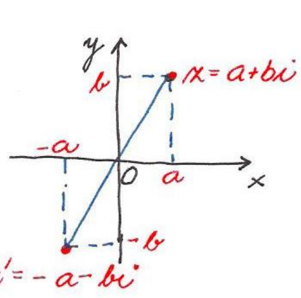
- OPAČNÉ ČÍSLO z' k číslu z: $z'=-z=-(a+bi)=-a-bi$ $(=[-a,-b])$

  $(z+z'=0 \qquad a+bi+(-a-bi)=0)$

  př. $z_1=3-2i$ $z_2=-\sqrt{3}-2i$ $z_3=-3$ $z_4=2i$

  $z_1'=-(3-2i)$ $z_2'=\sqrt{3}+2i$ $z_3'=3$ $z_4'=-2i$

  $z_1'=-3+2i$



- v Gaussově rovině jsou navzájem opačná čísla souměrná podle počátku $O[0,0]$

- ROZDÍL: $z_1-z_2=z_1+(-z_2)$ (přičteme číslo opačné)

  př. $(\sqrt{3}+3\sqrt{2}i)-(3+2\sqrt{2}i) = \sqrt{3}+3\sqrt{2}i-3-2\sqrt{2}i = \underbrace{\sqrt{3}-3}_{Re}+\underbrace{\sqrt{2}}_{Im}i$

- MOCNINA: stejná pravidla jako v R

$z^r \cdot z^s = z^{r+s}$ $\quad (z^r)^s = z^{rs}$ $\quad (z_1 z_2)^r = z_1^r \cdot z_2^r$ $\quad r,s \in N$

- IMAGINÁRNÍ JEDNOTKY

$i^1 = i$ $\quad i^5 = i^4 i = i$

$i^2 = -1$ $\quad i^6 = i^5 i = i \cdot i = -1$

$i^3 = -i \;\; (= i^2 i)$ $\quad i^7 = i^6 i = -1i = -i$

$i^4 = 1 \;\; (= i^2 i^2)$ $\quad i^8 = i^4 i^4 = 1 \cdot 1 = 1$

OBECNĚ: $i^{4k+1} = i^1 = i \quad k \in N$

$i^{4k+2} = i^2 = -1$

$i^{4k+3} = i^3 = -i$

$i^{4k} = i^0 = 1$

př. $i^{13} = i^{4\cdot 3+1} = i^1 = i$

$i^{123} = i^{120+3} = i^3 = -i$

př. $\underset{(a-b)^2}{(3-2i)^2} = \underset{a^2 - 2ab + b^2}{9 - 12i + 4\underbrace{i^2}_{-1}} = 9 - 12i - 4 = 5 - 12i$

př. $\underset{(a-b)^3}{(3-2i)^3} = \underset{a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3}{27 - 3\cdot 9\cdot 2i + 3\cdot 3\cdot (2i)^2 - (2i)^3} = 27 - 54i + 9\cdot 4\underbrace{i^2}_{-1} - \underbrace{8\underbrace{i^3}_{-i}}_{+8i} =$

$= 27 - 54i - 36 + 8i = -9 - 46i$

VZORCE

$(a \pm b)^3 = 1a^3b^0 \pm 3a^2b^1 + 3a^1b^2 \pm 1a^0b^3$

$= a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$

PASCALŮV Δ

1

$1 \quad 1$

$1 \quad 2 \quad 1 \qquad (a+b)^2$

$n=3 \quad \underbrace{1 \quad 3 \quad 3 \quad 1}_{\text{koeficienty}} \qquad (a+b)^3$

Příklady

① Napište v algebraickém tvaru, určete $Re(z)$, $Im(z)$

a) $(2+3i)(1+i) - (2+i)(1-3i) = 2 + 2i + 3i + \underbrace{3i^2}_{-3} - (2 - 6i + i - \underbrace{3i^2}_{+3}) =$

$= -1 + 5i - (5 - 5i) = -1 + 5i - 5 + 5i = -6 + 10i \quad ([-6, 10])$

$Re(z) = -6 \quad Im(z) = 10$

b) $(1-i)(3+2i)^2 - 2(-3-2i) = (1-i)(9 + 12i + \underbrace{4i^2}_{-4}) + 6 + 4i =$

$= (1-i)(5+12i) + 6 + 4i = 5 + 12i - 5i - \underbrace{12i^2}_{+12} + 6 + 4i = 23 + 11i$

$Re(z) = 23, \; Im(z) = 11$

c) $\underset{(a+b)^3}{(2+i)^3} = \underset{a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3}{2^3 + 3\cdot 2^2 i + 3\cdot 2\cdot i^2 + i^3} = 8 + 12i + \underbrace{6i^2}_{-6} + \underbrace{i^3}_{-i} =$

$= 8 + 12i - 6 - i = \underbrace{2}_{Re} + \underbrace{11i}_{Im}$

d) DÚ $\underset{(a-b)^3}{(\sqrt{3} - i)^3} = \underset{a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3}{(\sqrt{3})^3 - 3(\sqrt{3})^2 i + 3\sqrt{3}\underbrace{i^2}_{-1} - \underbrace{i^3}_{-i}} = 3\sqrt{3} - 3\cdot 3i - 3\sqrt{3} - (-i) =$

$= 3\sqrt{3} - 9i - 3\sqrt{3} + i = -8i \qquad (0 - 8i) \Rightarrow Re(z) = 0, \; Im(z) = -8$

e) DÚ $\left(\frac{1-i}{2}\right)^3 = \frac{(1-i)^3}{2^3} = \frac{1 - 3\cdot 1^2 i + \overbrace{3\cdot 1\cdot i^2}^{-3} - \overbrace{i^3}^{-(-i)}}{8} = \frac{1 - 3i - 3 + i}{8} = \frac{-2 - 2i}{8} =$

$= \frac{2(-1-i)}{8_4} = \frac{-1-i}{4} = -\frac{1}{4} - \frac{1}{4}i \qquad Re(z) = -\frac{1}{4} \quad Im(z) = -\frac{1}{4}$

② Vypočtěte

1.13/19

a) $i^3+i^{13}+i^{23}+i^{33}+i^{43}\left(=i^3+i^{\overset{(4\cdot3+1)}{12+1}}+i^{\overset{(4\cdot5+3)}{20+3}}+i^{32+1}+i^{40+3}=\right)$

$=i^3+i^1+i^3+i^1+i^3=-i+i-i+i-i=\underline{-i}$

b) $\underbrace{i\cdot i^2\cdot i^3\cdot i^4}_{\underbrace{i\cdot(-1)\cdot(-i)\cdot 1}_{-1}}\cdot\ldots\cdot i^{50}=\underbrace{(-1)\cdot(-1)(-1)\cdot\ldots\cdot(-1)}_{\underbrace{12\text{krát }(-1)}_{1}}\cdot i^{49}\cdot i^{50}=1\cdot i\cdot\underbrace{i^2}_{-1}=\underline{-i}$

$50:4=12$, 2

[nebo s využ. posloupností – viz 3.r. konec šk. r.

$=i^{1+2+3+4+\ldots+50}=i^{1275}=i^{1272+3}=i^3=-i$

$\overset{a_1}{1}+2+3+\ldots+\overset{a_n}{50}$ součet $n=50$ členů aritmetické posloupnosti

$s_n=\frac{n}{2}(a_1+a_n)=\frac{50}{2}(1+50)$]

c) $\underbrace{i+i^2+i^3+i^4}_{\underbrace{i-1-i+1}_{0}}+\ldots+i^{50}=12\cdot0+i^{49}+i^{50}=i^1+i^2=\underline{i-1}$

d) $1+\underbrace{i^4}_{1}+\underbrace{i^8}_{1}+\underbrace{i^{12}}_{1}+\ldots+\underbrace{i^{52}}_{1}=1+13\cdot1=\underline{14}$ $(52:4=13)$

③ Vypočtěte

1.14/19

DÚ

a) $[(1+2i)-(3-i)]\cdot(1-i)^2=[1+2i-3+i](1-2i+\underbrace{i^2}_{-1})=(-2+3i)(-2i)=$

$=4i-\underbrace{6i^2}_{+6}=4i+6=6+4i$ $\left(\underset{Re,\,Im}{[6,4]}\right)$

b) $[(1+2i)-(3-i)]^2(1-i)=(1+2i-3+i)^2(1-i)=(-2+3i)^2(1-i)=$

$=(4-12i+\underbrace{9i^2}_{-9})(1-i)=(-5-12i)(1-i)=-5+5i-12i+\underbrace{12i^2}_{-12}=$

$=\underline{-17-7i}$

c) $3\cdot(-1+i)(1-i)-i(2-3i)=3(-1+i+i-\underbrace{i^2}_{+1})-2i+3i^2=$

$=6i-2i-3=\underline{-3+4i}$

d) $(\sqrt2-i\sqrt3)i\sqrt3+(\sqrt3-i\sqrt2)\cdot i\sqrt2=i\underbrace{\sqrt2\sqrt3}_{\sqrt6}-i^2\underbrace{\sqrt3\sqrt3}_{\sqrt9=3}+i\sqrt6-i^2 2=$

$=i\sqrt6-\underbrace{3i^2}_{+3}+i\sqrt6-\underbrace{2i^2}_{+2}=\underline{5+2i\sqrt6}$ $\left(\left[\underset{Re}{5},\underset{Im}{2\sqrt6}\right]\right)$

④ Určete reálná čísla a, b tak, aby platilo

1.15/19 a) $(1-i)a-(-2+i)b=5-2i$

$a-ai+2b-bi=5-2i$

$\underbrace{a+2b}_{Re}+(\underbrace{-a-b}_{Im})i=\underbrace{5}_{Re}\underbrace{-2i}_{Im}$

porovnáme Re, Im (bez i)

$$\begin{aligned} a+2b&=5\\ -a-b&=-2 \end{aligned}\Big\}\oplus$$

$b=3$

$a=5-2b=5-2\cdot 3$

$a=-1$

b) $(\sqrt{3}+i\sqrt{2})a-(\sqrt{2}+i\sqrt{3})b-1=\underbrace{i^2}_{-1}-1$

$a\sqrt{3}+a\sqrt{2}i-b\sqrt{2}-b\sqrt{3}i-1=-1-1$

$\underbrace{a\sqrt{3}-b\sqrt{2}-1}_{Re}+(\underbrace{a\sqrt{2}-b\sqrt{3}}_{Im})i=-2$ $\quad \underbrace{-2}_{Re}+\underbrace{0i}_{Im}$

$a\sqrt{3}-b\sqrt{2}-1=-2$

$a\sqrt{2}-b\sqrt{3}=0 \Rightarrow a\sqrt{2}=b\sqrt{3}$

$a=\frac{b\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

$\frac{b\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{2}}-b\sqrt{2}=-1$

$\frac{3b}{\sqrt{2}}-b\sqrt{2}=-1 \quad /\cdot\sqrt{2}$

$3b-b\underbrace{\sqrt{2}\sqrt{2}}_{2}=-\sqrt{2}$

$3b-2b=-\sqrt{2}$

$b=-\sqrt{2}$

$a=\frac{-\cancel{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{3}}{\cancel{\sqrt{2}}}$

$a=-\sqrt{3}$

⑤ Určete reálná čísla x, y, která jsou řešením rovnice

MS4 3.11/127 DÚ

a) $(5+2i)x+(3-5i)y=124$ $\quad O=R$, $D=R$

$5x+2xi+3y-5yi=124$

$\underbrace{5x+3y}_{Re}+(\underbrace{2x-5y}_{Im})i=\underbrace{124}_{Re}\underbrace{(+0i)}_{Im}$ porovnáme Re, Im

$$\begin{aligned} 5x+3y&=124 \quad /\cdot 5\\ 2x-5y&=0 \quad /\cdot 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 25x+15y&=620\\ 6x-15y&=0 \end{aligned}$$

$31x=620$

$x=20$

$2x-5y=0$

$40-5y=0$

$5y=40$

$y=8$

$K=\{[20,8]\}$

b) $2x+(1+i)(x+y)=7+i$ $\quad O=R$, $D=R$

$2x+x+y+xi+yi=7+i$

$\underbrace{3x+y}_{Re}+(\underbrace{x+y}_{Im})i=\underbrace{7}_{Re}+i$ $\quad (7+\underbrace{1i}_{Im})$

$$\begin{aligned} 3x+y&=7\\ x+y&=1 \end{aligned}\Big\}\ominus$$

$2x=6$

$x=3$

$x+y=1$

$y=1-x$

$y=1-3$

$y=-2$

$K=\{[3,-2]\}$